

Viorel Vlad

Teste rezolvate de matematică clasa a XI-a

Pregătire pentru Bacalaureat

Specializarea Matematică-Informatică (M1)



RENTROP & STRATON



Portal
ÎNVĂȚĂMÂNT

www.portalinvatamant.ro

TEST

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

Testul nr. 1

SUBIECTUL I

(30 puncte)

- | | |
|-----------|--|
| 5p | 1. Determinați numărul real x știind că numerele 2020, x și 2022 sunt în progresie aritmetică. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați numărul real a pentru care $(f \circ f)(x) = x + 2020$ pentru orice număr real x . |
| 5p | 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x-3} = \sqrt{2}$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor să fie mai mare decât 51. |
| 5p | 5. Determinați numerele reale a și b știind că, în reperul cartezian xOy , punctul de intersecție a dreptelor $x - (a + 1010)y + 2021 = 0$ și $x + by - 5 = 0$ este $A(a, 2)$. |
| 5p | 6. Demonstrați că $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1}{\operatorname{ctgx}}$, pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

- | | |
|-----------|--|
| | 1. În mulțimea $\mathcal{S}_3$ a permutărilor de 3 elemente, se consideră permutarea: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ |
| 5p | a) Să se verifice dacă permutarea este pară |
| 5p | b) Să se calculeze σ^{2022} |
| 5p | c) Să se rezolve ecuația $x^2 = \sigma$ cu $x \in \mathcal{S}_3$. |
| | 2. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, și matricea $\mathcal{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 5p | a) Să se calculeze $A(1)^{2021}$. |
| 5p | b) Să se calculeze determinantul matricei $\mathcal{I}_3 + A(1) + A(1)^t$. |
| 5p | c) Dacă $B(x) = A(x) + \mathcal{I}_3$, să se calculeze $B(1) + B(2) + \dots + B(2021)$. |

SUBIECTUL al III-lea

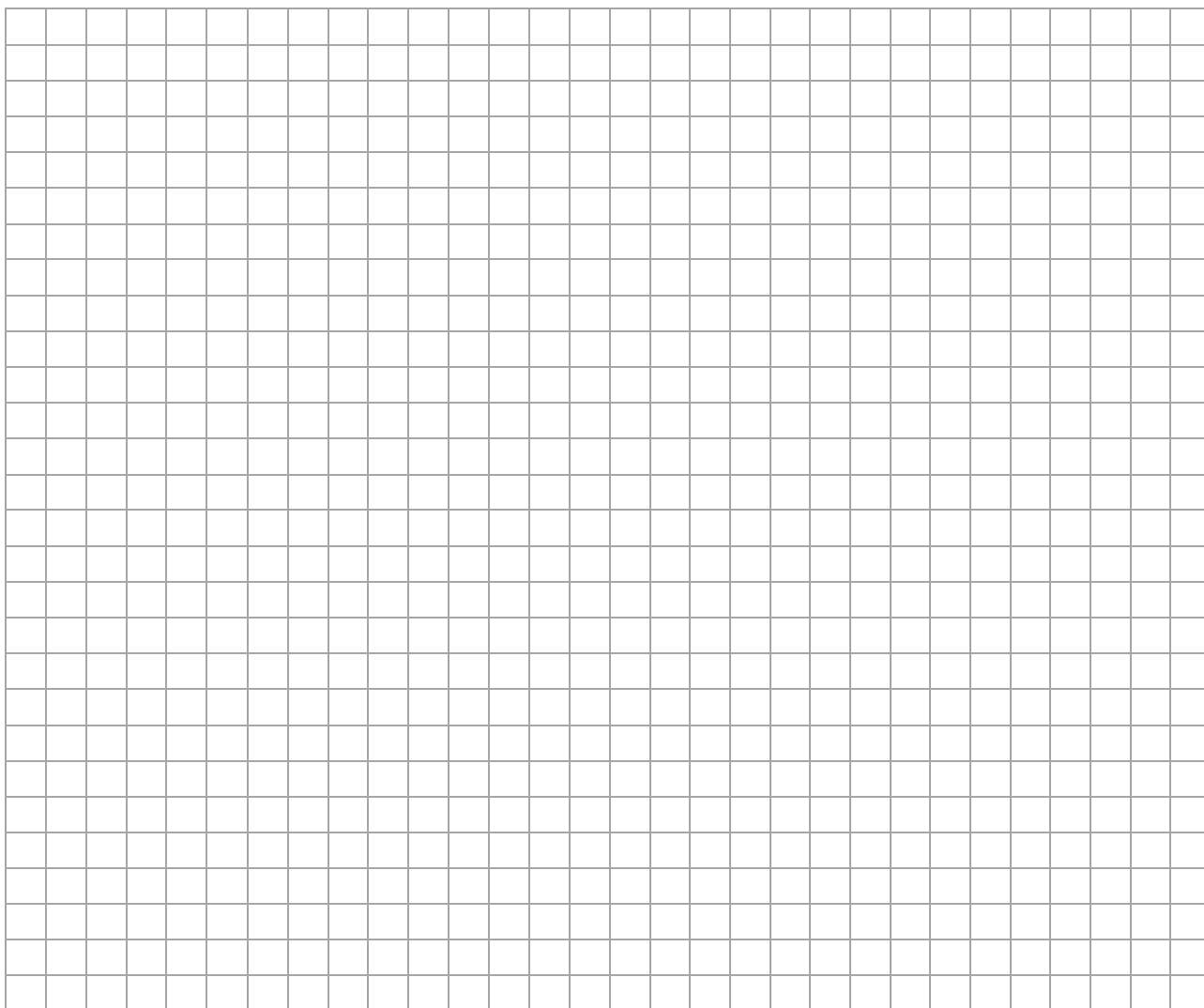
(30 puncte)

- | | |
|-----------|--|
| | 1. S Se consideră șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit astfel: $x_0 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$, $\forall n \geq 1$ |
| 5p | a) Să se studieze mărginirea. |

Teste rezolvate de matematică clasa a XI-a
Pregătire pentru Bacalaureat – Specializarea Matematică – Informatică (M1)

- | | |
|---|---|
| 5p | b) Să se studieze monotonia. |
| 5p | c) Să se studieze convergența și să se calculeze limita. |
| <p>2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2021^{x+1} - 3, & x \leq -1 \\ 2x^3 + (a-3)x - 4, & x > -1 \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$</p> | |
| 5p | a) Determinați numărul real a pentru care funcția este continuă în $x = -1$. |
| 5p | b) Să se rezolve ecuația $f(x) = -2$, pentru $x \leq -1$. |
| 5p | c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$, pentru $a=3$. |

SUCCES!



SUGESTIE DE REZOLVARE

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

Testul nr. 1

SUBIECTUL I

(30 puncte)

1.	Condiția ca trei numere reale să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice: $x = \frac{2020+2022}{2} \Rightarrow 2x = 4042 \Rightarrow x = 2021$.
2.	$(f \circ f)(x) = x + 2020 \Rightarrow f(f(x)) = x + 2020 \Rightarrow f(x) + a = x + 2020 \Rightarrow (x + a) + a = x + 2020 \Rightarrow 2a = 2020 \Rightarrow a = 1010$.
3.	$2^{x-3} = \sqrt{2} \Rightarrow 2^{x-3} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x - 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3 + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{2}$
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile. Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor mai mare decât 51 sunt: 69, 78, 79, 87, 88, 89, 96, 97, 98, 99. Deci avem 10 cazuri favorabile. Probabilitatea este: $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$
5.	Deoarece $A(a, 2)$ este punctul de intersecție al celor două drepte, coordonatele punctului verifică cele două ecuații. Se formează sistemul: $\begin{cases} a - (a + 1010) \times 2 + 2021 = 0 \\ a + b \times 2 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2a - 2020 + 2021 = 0 \\ a + 2b - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + 1 = 0 \\ a + 2b - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = (5 - a)/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = (5 - 1)/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$
6.	$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$, pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{2 \times \sin x \times \cos x}{((\cos x)^2 + (\sin x)^2) + ((\cos x)^2 - (\sin x)^2)} = \frac{1}{\frac{\cos x}{\sin x}}$ pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{2 \times \sin x \times \cos x}{2 \times (\cos x)^2} = \frac{\sin x}{\cos x}$ pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}$ pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ Adevărat.

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

1. a)	Perechea (i, j) se numeste inversiune a permutării σ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$. Numărul inversiunilor îl notăm $m(\sigma)$. $m(\sigma) = 1 + 1 = 2, \varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)} = (-1)^2 = 1$, deci σ este permutare pară.
--------------	--

Teste rezolvate de matematică clasa a XI-a
Pregătire pentru Bacalaureat – Specializarea Matematică – Informatică (M1)

b)	$\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(\sigma(1)) & \sigma(\sigma(2)) & \sigma(\sigma(3)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \sigma^2 \circ \sigma =$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e, \sigma^{2022} = (\sigma^3)^{674} = e^{674} = e.$
c)	Dacă $x \in \mathcal{S}_3$ ar fi o permutare impară, atunci $x^2 = e$. Deci $x = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
2. a)	$A(1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A(1)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Deci } A(1)^{2021} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
b)	$J_3 + A(1) + A(1)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Determinantul matricei este egal cu 0.
c)	$B(x) = A(x) + J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ x & x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$ $1+2+\dots+2021 = \frac{2021 \times (2021+1)}{2} = \frac{2021 \times 2022}{2} = 2021 \times 1011 = 2043231$ $B(1) + B(2) + \dots + B(2021) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \dots +$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2021 & 1 & 0 \\ 2021 & 2021 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2021 & 0 & 0 \\ 2043231 & 2021 & 0 \\ 2043231 & 2043231 & 2021 \end{pmatrix}$

SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

1. a)	Observăm că $x_0, x_1 \in (0,2)$. Demonstrăm prin inducție propoziția: $P(n): 0 < x_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$ Etapa de verificare: $P(0): 0 < x_0 < 2$, afirmația este adevărată. Etapa de demonstrație: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $P(n+1): 0 < x_{n+1} < 2$ este afirmația care trebuie demonstrată, în condițiile în care $P(n)$ este adevărată. $0 < x_{n+1} < 2$ se scrie cu ajutorul relației de recurență $0 < \sqrt{2+x_n} < 2$ Cum $P(n)$ este adevărată obținem $0 < \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2} < \sqrt{4} = 2$ Deci $P(n)$ este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \Rightarrow$ șirul este mărginit.
--------------	--

Teste rezolvate de matematică clasa a XI-a
Pregătire pentru Bacalaureat – Specializarea Matematică – Informatică (M1)

b)	Avem $x_n \leq x_{n+1} \Leftrightarrow x_n \leq \sqrt{2 + x_n} \Leftrightarrow x_n^2 \leq 2 + x_n \Leftrightarrow x_n^2 - x_n - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x_n^2 - 1) - (x_n + 1) \leq 0 \Leftrightarrow (x_n + 1)(x_n - 1 - 1) \Leftrightarrow (x_n + 1)(x_n - 2) \leq 0$, adevarat deoarece $0 < x_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Deci șirul este monoton crescător.
c)	Conform rezultatelor de la a) și b), șirul este monoton crescător și mărginit superior. Deci șirul este convergent. Fie l limita șirului. $x_{n+1} \leq \sqrt{2 + x_n}$, trecând la limită $\Leftrightarrow l \leq \sqrt{2 + l} \Leftrightarrow l^2 - l - 2 = 0, l_1 = -1$ (nu convine) și $l_2 = 2$ (limita șirului)
2. a)	Funcția este continuă în $x = -1$, $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (2021^{x+1} - 3) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (2x^3 + (a - 3)x - 4) = f(-1) \Leftrightarrow -2 = -3 - a = -2 \Leftrightarrow a = -1$.
b)	$f(x) = -2$, pentru $x \leq -1 \Leftrightarrow 2021^{x+1} - 3 = -2 \Leftrightarrow 2021^{x+1} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
c)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x+1)^3 - 4}{2x^3 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x - 2}{2x^3 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(2 + \frac{6}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{2}{x^3})}{x^3(2 - \frac{4}{x^3})} = \frac{2}{2} = 1$.