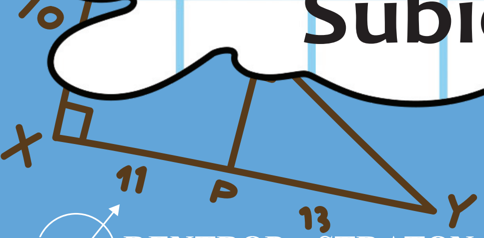
Mihael Mihalcea (coord.), Radu-Cătălin Gherghe,
Sorina Lupu, Tudor-Eugen Lupu

EVALUAREA NAȚIONALĂ
MATEMATICĂ

CLASA A VIII-A

Probleme rezolvate de tipul celor de la Subiectul al III-lea



R&S RENTROP & STRATON

Portal ÎNVĂȚĂMÂNT
www.portalinvatamant.ro

TESTE

Testul nr. 1

1. Într-o gospodărie se găsesc 27 de oi și rațe. Numărul de picioare ale oilor și rațelor este egal cu 78.

a) Este posibil ca în gospodărie să se afle 20 de rațe? Justifică răspunsul dat.

b) Determină numărul oilor din gospodărie.

2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x+5}+\frac{1}{x-5}-\frac{10}{x^2-25}\right):\frac{x^2-49}{(x+5)(x+7)}$, unde x este număr real, $x \neq -5$, $x \neq 5$, $x \neq 7$, $x \neq -7$.

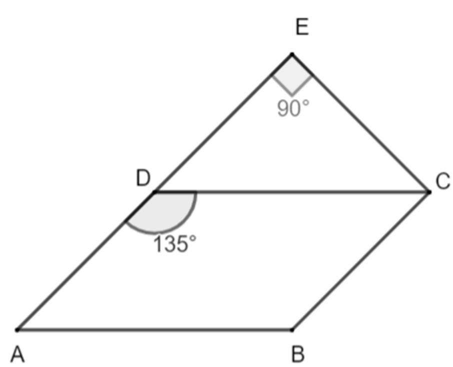
a) Arată că $E(x)=\frac{3}{x-7}$, unde x este număr real, $x \neq -5$, $x \neq 5$, $x \neq 7$, $x \neq -7$.

b) Determină numerele naturale n pentru care $E(n)$ este număr natural.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$.

a) Arată că $2\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)=f(0)$.

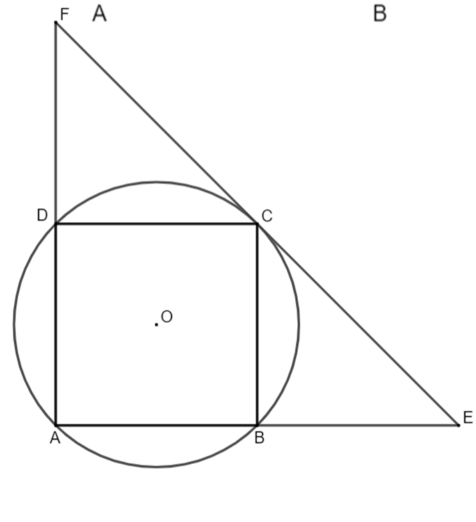
b) Rezolvă în mulțimea numerelor naturale inecuația $f(n)\leq 0$.



4. În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$ cu $\sphericalangle ADC=135^\circ$, $AB=8\,cm$ și $AD=3\sqrt{2}\,cm$, iar triunghiul dreptunghic isoscel DCE are ipotenuza DC.

a) Arată că punctele A, D și E sunt coliniare.

b) Determină perimetrul și aria patrulaterului $ABCE$.

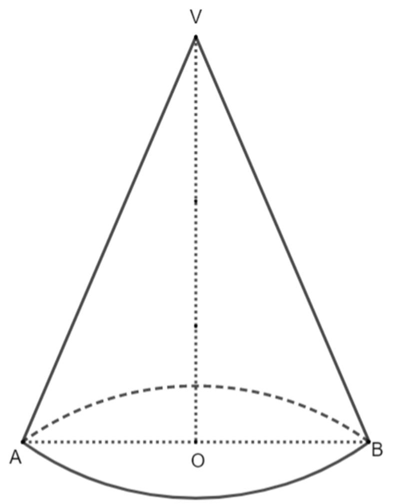


5. În figura alăturată este reprezentat un pătrat $ABCD$ înscris într-un cerc de centru O și diametrul de $10\,cm$. Tangenta la cerc în punctul C intersectează dreptele AB și AD în punctele E și F.

a) Arată că BD este linie mijlocie în triunghiul EAF.

b) Determină raportul dintre aria cercului și aria patrulaterului $BEFD$.

6. În figura alăturată este reprezentat un con cu înălțimea $VO = 24\,cm$ și aria bazei $49\pi\,cm^2$.



a) Arată că generatoarea conului este egală cu $25\,cm$.

b) Determină aria totală și volumul triunghiului de con obținut prin secționarea conului cu un plan paralel cu baza ce împarte înălțimea în două părți egale.

Idei/Observații/Note

SUGESTII
DE
REZOLVARE

Testul nr. 1

1. a) **Nu**. Dacă în gospodărie ar fi 20 de rațe atunci numărul oilor ar fi egal cu 7. În acest caz numărul total de picioare ar fi $20 \cdot 2 + 7 \cdot 4 = 40 + 28 = 68 \neq 78$.

1. b) Notăm cu x numărul oilor și cu y numărul rațelor. Obținem următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ 4x + 2y = 78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 54 \\ 4x + 2y = 78 \end{cases} \Rightarrow 2x = 24,$$ de unde obținem $x = 12$.

2. a) $$E(x) = \frac{2(x-5) + x + 5 - 10}{(x-5)\cancel{(x+5)}} \cdot \frac{\cancel{(x+5)}\cancel{(x+7)}}{(x-7)\cancel{(x+7)}} = \frac{2x - 10 + x + 5 - 10}{(x-5)(x-7)} = \frac{3x-15}{(x-5)(x-7)} =$$

$$= \frac{3\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x-7)} = \frac{3}{x-7},$$ unde x este număr real, $x \neq -5$, $x \neq 5$, $x \neq 7$, $x \neq -7$.

2. b) $E(n) = \frac{3}{n-7}$, unde n este număr natural, $n \neq 5$, $n \neq 7$.

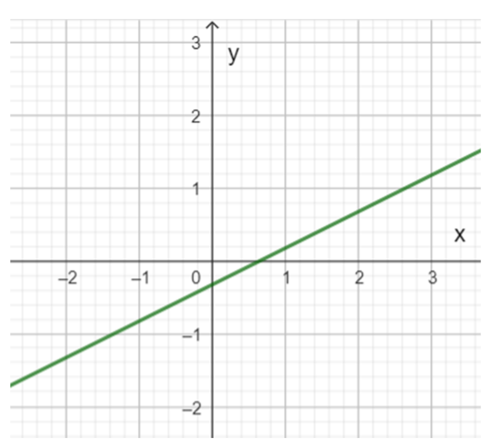
$\frac{3}{n-7}$ este număr natural dacă și numai dacă $n - 7 \in \{1, 3\}$. Obținem $n \in \{8, 10\}$.

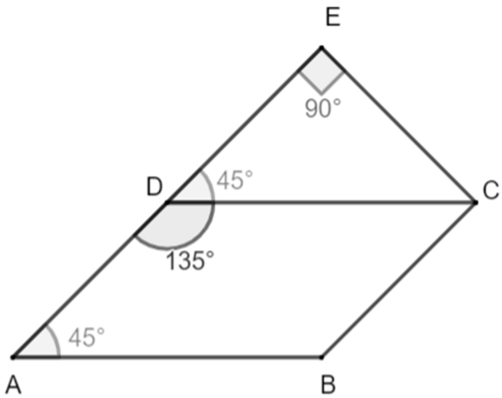
3. a) Avem $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$ și $f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$.

$2 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3} = f(0)$.

3. b) $\frac{1}{2} \cdot n - \frac{1}{3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot n \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow n \leq \frac{2}{3}$ și cum n este număr natural rezultă $n = 0$.

Soluția poate fi dedusă și din reprezentarea grafică a funcției.

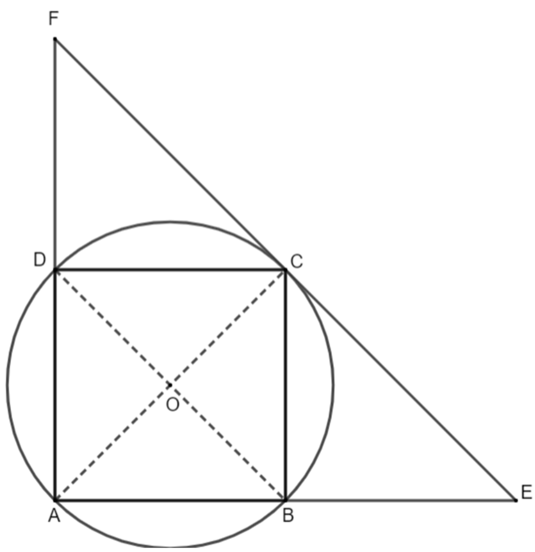




4. a) Deoarece triunghiul EDC este dreptunghic isoscel cu $\sphericalangle DEC = 90^\circ$ rezultă că $\sphericalangle EDC = 45^\circ$.
Avem $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ADB + \sphericalangle EDC = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, de unde deducem că punctele A, D și E sunt coliniare.

4. b) În triunghiul DEC, $\sphericalangle DEC = 90^\circ$, $\sphericalangle EDC = 45^\circ$.
Rezultă că $\sin(\sphericalangle EDC) = \frac{EC}{DC}$, de unde obținem $EC = DC \cdot \sin 45^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}\ cm$. Cum triunghiul EDC este isoscel rezultă că $DE = 4\sqrt{2}\ cm$ și obținem $AE = AD + DE = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}\ cm$.
$P_{ABCE} = AB + BC + CE + EA = 8 + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 8 + 14\sqrt{2} = 2\left(4 + 7\sqrt{2}\right) cm$.
$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDE = 45^\circ$, unghiuri corespondente determinate de dreptele paralele AB și CD tăiate de secanta AE.

$$A_{ABCE} = A_{ABCD} + A_{DCE} = AD \cdot AB \cdot \sin(\sphericalangle BAD) + \frac{EC \cdot ED}{2} = 8 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} =$$
$$= 24\ cm^2 + 16\ cm^2 = 40\ cm^2.$$



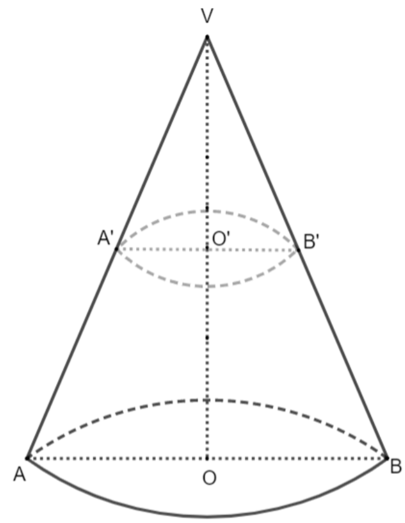
5. a) Evident, punctul O este intersecția diagonalelor pătratului. Avem $EF \perp OC$ și $OC \perp BD$ de unde rezultă că $EF \parallel BD$ și cum $DC \parallel BE$ rezultă că patrulaterul $BDCE$ este paralelogram, deci $BD = CE$.
Analog se arată că $BD = FC$.
Deci $BD = \frac{EF}{2}$. Rezultă că BD este linie mijlocie în triunghiul AEF.

5. b) Raza cercului este egală cu $5\ cm$, iar latura pătratului este $AB = R\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\ cm$.
Aria cercului este $A = \pi R^2 = 25\pi\ cm^2$.

Din **a)** rezultă că $A_{\Delta AFE} = 4A_{\Delta ABD} \Rightarrow A_{BEFD} = A_{\Delta AFE} - A_{\Delta ABD} = 3A_{\Delta ABD} = 3 \cdot \frac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 75\ cm^2$.

Obținem $\frac{A_{\bigcirc}}{A_{BEFD}}=\frac{25\pi}{75}=\frac{\pi}{3}$.

6. a) $A_b=\pi R^2=49\pi \Rightarrow R=7\,cm$.



În triunghiul VOA dreptunghic, $\sphericalangle VOA=90^\circ$, aplicăm teorema lui Pitagora:
$VA^2=VO^2+AO^2=24^2+7^2=576+49=625$, de unde obținem generatoarea conului $VA=25\,cm$.

6. b) Înălțimea trunchiului de con este $h'=OO'=\frac{VO}{2}=12\,cm$. Din asemănarea triunghiurilor $\Delta VO'A' \sim \Delta VOA$ rezultă că: $\frac{VO'}{VO}=\frac{VA'}{VA}=\frac{O'A'}{OA}=\frac{1}{2} \Rightarrow$
$r=\frac{7}{2}=3,5\,cm$ și $VA'=\frac{VA}{2}=\frac{25}{2}=12,5\,cm$

Deci generatoarea trunchiului de con este $G'=AA'=\frac{25}{2}=12,5\,cm$.

Obținem: $A_{trunchi}=\pi(R+r)G'+\pi R^2+\pi r^2=131,25\pi+49\pi+12,25\pi \Rightarrow A_{trunchi}=192,5\pi\,cm^2$
și

$$V_{trunchi}=\frac{\pi h'}{3}\left(R^2+r^2+Rr\right)=\frac{12\pi}{3}(49+12,25+24,5)=343\pi\,cm^3.$$