TEST

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 4 ore.**

Testul nr. 3

SUBIECTUL I **(60 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2 x+\log_x 32$.
7p	**a)** Determinați coordonatele punctelor de intersecția dintre graficul funcției f și dreapta de ecuație $y=6$.
8p	**b)** Demonstrați că șirul $a_n=\dfrac{f(2^n)}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$ este strict descrescător și mărginit.
	2. Se consideră hexagonul $ABCDEGF$ înscris într-un cerc de centru O, cu $AB=BC=EF$ și $CD=DE=AF$.
7p	**a)** Demonstrați că $\sphericalangle BCD=\sphericalangle BAF=\sphericalangle EFA=\sphericalangle DEF=\dfrac{2\pi}{3}$.
8p	**b)** Arătați că raportul dintre aria cercului și aria hexagonului este mai mic decât $\dfrac{8}{3}$.
	3. Se consideră sistemul $(S)\begin{cases}x-y+z=0\\2x+my+(m+4)z=0\\3x-2y+(m-2)z=3\end{cases}$, unde m este un număr real și notăm cu $D(m)$ determinantul matricei sistemului (S).
7p	**a)** Determinați numărul real nenul m, pentru care $m^2D\left(\dfrac{1}{m}\right)+D(4m)=13$.
8p	**b)** Determinați valorile reale ale lui m, pentru care sistemul (S) are o soluție unică (x_0,y_0,z_0) care verifică egalitatea $x_0^{2022}+y_0^{2022}+z_0^{2022}=2^{2022}+2$.
	4. Se consideră funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.
7p	**a)** Determinați imaginea funcție f.
8p	**b)** Determinați valoarea numărului real a știind că $\displaystyle\int_2^3 f(x)dx=\ln\dfrac{a(e^6-2e^3+1)}{e^5-2e^3+e}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VII-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare:

Clasa a VII-a
1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare: - *Recunoașterea unor relații matematice care reprezintă ecuații;*

- Identificarea necunoscutei, coeficienților, termenilor liberi ai unei ecuații;
- Furnizarea unor exemple de relații matematice care reprezintă ecuații sau sisteme de ecuații liniare;
- Identificarea și notarea datelor cunoscute și a datelor necunoscute în cazul problemelor care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau sistemelor de ecuații.

2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare:
- Verificarea, prin calcul, că un număr dintr-o enumerare este soluție a unei ecuații;
- Verificarea, prin calcul, a soluției unui sistem de ecuații liniare;
- Verificarea, prin calcul, că un număr real este soluție comună a unor ecuații.

3.2. Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații liniare:
- Aducerea unor egalități la o formă mai simplă prin transformări echivalente;
- Aplicarea transformărilor pentru obținerea unor sisteme de ecuații liniare echivalente;
- Utilizarea probei pentru justificarea unui rezultat obținut.

4.2. Redactarea rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare:
- Rezolvarea unor ecuații de forma $ax+b=0$, *unde* $a,b\in\mathbb{R}$;
- Utilizarea metodelor de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare (metoda reducerii și metoda substituției);
- Verificarea validității unei soluții a unei ecuații sau a unui sistem de ecuații.

5.2. Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare:
- Utilizarea transformărilor echivalente a ecuațiilor pentru fundamentarea unei metode de rezolvare;
- Evidențierea unor soluții asociate unei ecuații liniare în cadrul unui sistem de ecuații (de exemplu, observarea faptului că fiecare dintre ecuațiile unui sistem de ecuații liniare are mai multe soluții);
- Compararea metodelor de rezolvare a unor sisteme de ecuații liniare.

6.2. Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare:
- Transpunerea relațiilor cuprinse într-o situație dată sub formă de ecuații;
- Rezolvarea unor probleme având conținut practic, utilizând ecuații sau sisteme de ecuații liniare;
- Utilizarea estimărilor pentru încadrarea într-un ordin de mărime a soluției unei ecuații.

Domeniul de conținut	Conținuturi
Algebră	**2. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE** Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă; identități Ecuații de forma $ax+b=0$, *unde* $a,b\in\mathbb{R}$; mulțimea soluțiilor unei ecuații; ecuații echivalente Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute; rezolvare prin metoda

	substituției și/sau prin metoda reducerii Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare.

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.
(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

În vederea evaluării formării/dezvoltării a trei competențe specifice din secvența dată, elaborați 3 itemi de următoarele tipuri: *un item de tip pereche, un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme*, menționând pentru fiecare item competența/competențele evaluate.

Notă: Pentru fiecare dintre itemii elaborați se punctează menționarea competenței/competențelor evaluate și respectarea formatului itemului, elaborarea detaliată, corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) și corectitudinea științifică a informației de specialitate.

SUGESTIE
DE REZOLVARE

Testul nr. 3

SUBIECTUL I

1. a) Un punct $M(x,y)$ se află la intersecția dintre graficul funcție f și dreapta $y=6$ dacă și numai dacă $f(x)=6 \Leftrightarrow \log_2 x + \log_x 32 = 6$

Notăm $\log_2 x = t \Rightarrow \log_x 32 = \frac{5}{t}$.

$t+\frac{5}{t}=6 \Leftrightarrow t^2-6t+5=0 \Leftrightarrow$

$(t-1)(t-5)=0 \Leftrightarrow t=1$ sau $t=5$.

Avem $\log_2 x = 1 \Leftrightarrow x=2$

$\log_2 x = 5 \Leftrightarrow x=2^5=32$.

Deci, punctele de intersecție sunt $M(2,6)$ și $N(32,6)$,

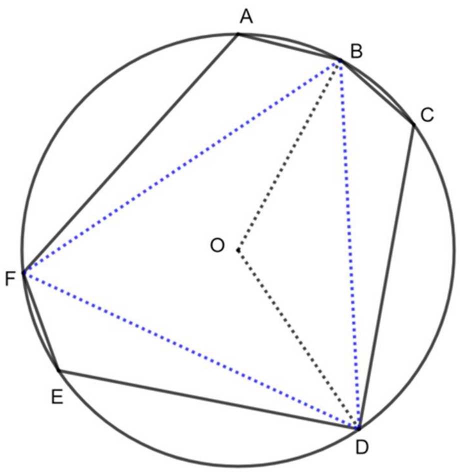
b) $f(2^n)=\log_2 2^n + \log_{2^n} 32 = n+\frac{5}{n}$.

Deci, $a_n = \frac{f(2^n)}{n} = 1+\frac{5}{n^2} \Rightarrow a_n > 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (1)$.

Avem $a_{n+1}-a_n = 1+\frac{5}{(n+1)^2}-1-\frac{5}{n^2} = \frac{5}{(n+1)^2}-\frac{5}{n^2} = 5\frac{n^2-(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{-10n-5}{n^2(n+1)^2} < 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Deci, $(a_n)_{n\ge1}$ este strict descrescător $\Rightarrow a_n \le a_1,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_n \le 6,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (2)$.

Din (1) și (2) rezultă că $1 < a_n \le 6,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică șirul $(a_n)_{n\ge1}$ este mărginit.



2. a) Din $AB=BC=EF$ deducem că $m(\overset{\frown}{AB})=m(\overset{\frown}{BC})=m(\overset{\frown}{EF})$.

Iar din $CD=DE=AF$ deducem că $m(\overset{\frown}{CD})=m(\overset{\frown}{DE})=m(\overset{\frown}{AF})$.

Deci, $3\cdot m(\overset{\frown}{BC})+3\cdot m(\overset{\frown}{CD})=360^0 \Rightarrow$

$m(\overset{\frown}{BC})+m(\overset{\frown}{CD})=120^0 \Rightarrow m(\overset{\frown}{BCD})=120^\circ$

$\Rightarrow m(\overset{\frown}{BAD})=240^\circ$.

Rezultă că, $m(\sphericalangle BCD)=\frac{m(\overset{\frown}{BAD})}{2}=120^\circ \Rightarrow \sphericalangle BCD = \frac{2\pi}{3}$.

Analog se arată că $\sphericalangle BAF = \sphericalangle EFA = \sphericalangle DEF = \frac{2\pi}{3}$.

b) Avem $\Delta BCD \equiv \Delta ABF \equiv \Delta BEF\ (LUL) \Rightarrow BD = DF = AF \Rightarrow \Delta BDF$ echilateral.

Vom nota $AB = BC = EF = a$ şi $CD = DE = AF = b$

În ΔBCD aplicăm teorema cosinusului, avem:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC\cdot CD\cdot\cos(\sphericalangle BCD) = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = a^2 + b^2 + ab.$$

Deci $S_{\Delta BDF} = \frac{BD^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(a^2+b^2+ab\right)\sqrt{3}}{4}$.

$$S_{\Delta BCD} = \frac{BC\cdot CD\cdot\sin\left(\sphericalangle BCD\right)}{2} = \frac{ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{ab\sqrt{3}}{4}.$$

$$S_{ABCDEF} = 3\cdot S_{\Delta BCD} + S_{\Delta BDF} = 3\frac{ab\sqrt{3}}{4} + \frac{\left(a^2+b^2+ab\right)\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(a^2+b^2+4ab\right)\sqrt{3}}{4}$$

În triunghiul BOD, avem $m(\sphericalangle BOD) = m\left(\overset{\frown}{BCD}\right) = 120^\circ$ şi $BO = OD = R$, aplicăm teorema cosinusului şi avem:

$$BD^2 = BO^2 + DO^2 - 2BO\cdot DO\cdot\cos(\sphericalangle BOD) \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 + ab = R^2 + R^2 - 2R\cdot R\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 3R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{a^2+b^2+ab}{3}$$

Deci, $S_{cerc} = \pi R^2 = \frac{\left(a^2+b^2+ab\right)\pi}{3}$

$$\frac{S_{cerc}}{S_{hexagon}} = \frac{\left(a^2+b^2+ab\right)\pi}{3}\cdot\frac{4}{\left(a^2+b^2+4ab\right)\sqrt{3}} = \frac{4a^2+4b^2+4ab}{3a^2+3b^2+12ab}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Cum, $\frac{\pi}{\sqrt{3}} < 2$ obţinem că

$$\frac{S_{cerc}}{S_{hexagon}} < \frac{4a^2+4b^2+4ab}{3a^2+3b^2+12ab}\cdot 2 = \frac{8a^2+8b^2+8ab}{3a^2+3b^2+12ab} = \frac{8}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+ab}{a^2+b^2+4ab} < \frac{8}{3}.$$

3. a) $D(m) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & m & m+4 \\ 3 & -2 & m-2 \end{vmatrix} \underset{L_3-L_1}{\overset{L_2+L_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & m+2 & m+2 \\ 3 & 1 & m-5 \end{vmatrix} = (m+2)(m-6)$

Avem $m^2 D\left(\frac{1}{m}\right) + D(4m) = 13 \Leftrightarrow m^2\left(\frac{1}{m}+2\right)\left(\frac{1}{m}-6\right) + (4m+2)(4m-6) = 13 \Leftrightarrow$

$(2m+1)(1-6m) + 2(2m+1)(4m-6) = 13 \Leftrightarrow$

$(2m+1)(2m-11)=13 \Leftrightarrow 4m^2-20m-24=0 \Leftrightarrow (m-5)(m+1)=0 \Leftrightarrow$
$m=5$ și $m=-1$

b) Sistemul (S) are o soluție unică $\Leftrightarrow$ $D(m)=(m+2)(m-6)\neq 0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,6\}$.

Pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,6\}$ sistemul (S) este tip Cramer.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & m & m+4\\ 3 & -2 & m-2\end{vmatrix}=3(-2m-4)=-6(m+2).$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & m+4\\ 3 & 3 & m-2\end{vmatrix}=-3(m+2)$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & m & 0\\ 3 & -2 & 3\end{vmatrix}=3(m+2).$$

Deci, $x_0=\dfrac{\Delta_x}{D(m)}=\dfrac{-6(m+2)}{(m+2)(m-6)}=\dfrac{-6}{m-6}$

$$y_0=\frac{\Delta_y}{D(m)}=\frac{-3(m+2)}{(m+2)(m-6)}=\frac{-3}{m-6}$$

$$z_0=\frac{\Delta_z}{D(m)}=\frac{3(m+2)}{(m+2)(m-6)}=\frac{3}{m-6}.$$

$$x_0^{2022}+y_0^{2022}+z_0^{2022}=\left(\frac{-6}{m-6}\right)^{2022}+\left(\frac{-3}{m-6}\right)^{2022}+\left(\frac{3}{m-6}\right)^{2022}=\frac{6^{2022}+2\cdot 3^{2022}}{(m-6)^{2022}}=\frac{3^{2022}\left(2^{2022}+2\right)}{(m-6)^{2022}} \Rightarrow$$

$$\frac{3^{2022}\left(2^{2022}+2\right)}{(m-6)^{2022}}=2^{2022}+2 \Rightarrow (m-6)^{2022}=3^{2022}$$

Deci, $m-6=3$ sau $m-6=-3$, de unde rezultă $m=9$ sau $m=3$.

4. a)

$$f'(x)=\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)'+\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)'=\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{e^x\left(e^x-1\right)-e^x\left(e^x+1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}.$$

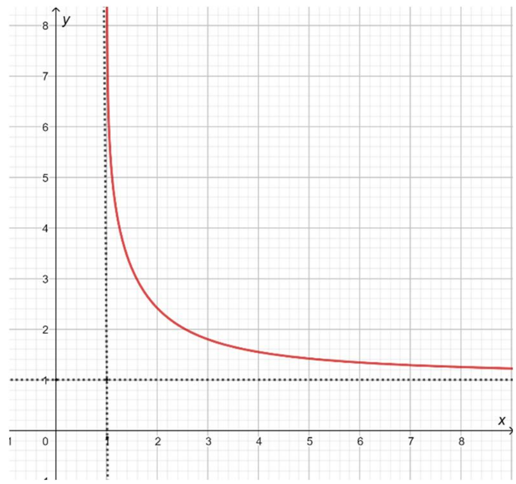
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2}-\frac{2e^x}{\left(e^x-1\right)^2}<0$$

Deci, funcția este strict f descrescătoare.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\ln\frac{x+1}{x-1}+\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)=\ln\frac{2}{0^+}+\frac{e+1}{e-1}=\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}\left(\ln\frac{x+1}{x-1}+\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}+\frac{\cancel{e^x}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}\right)=1$$

Deducem că $\operatorname{Im} f=(1,\infty)$



b) $\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\left(\ln\frac{x+1}{x-1}+\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)dx=\int_2^3\ln\frac{x+1}{x-1}dx+\int_2^3\frac{e^x+1}{e^x-1}dx=I_1+I_2$.

$$I_1=\int_2^3\ln\frac{x+1}{x-1}dx=x\ln\frac{x+1}{x-1}\Big|_2^3-\int_2^3 x\frac{2}{1-x^2}dx=3\ln 2-2\ln 3+\ln\left|x^2-1\right|\Big|_2^3=$$

$$3\ln 2-2\ln 3+\ln 8-\ln 3=\ln\frac{64}{27}.$$

$$I_2=\int_2^3\frac{e^x+1}{e^x-1}dx$$

Vom face schimbarea de variabilă $e^x=t \Leftrightarrow x=\ln t$, deci $dx=\frac{1}{t}dt$.

Noile capete de integrare vor fi: $t=e^2$ și $t=e^3$.

$$I_2=\int_{e^2}^{e^3}\frac{t+1}{t-1}\cdot\frac{1}{t}dt=\int_{e^2}^{e^3}\frac{2t-t+1}{t(t-1)}dt==\int_{e^2}^{e^3}\frac{2t}{t(t-1)}dt-\int_{e^2}^{e^3}\frac{t-1}{t(t-1)}dt=2\int_{e^2}^{e^3}\frac{1}{t-1}dt-\int_{e^2}^{e^3}\frac{1}{t}dt=$$

$$=2\ln|t-1|\Big|_{e^2}^{e^3}-\ln|t|\Big|_{e^2}^{e^3}=2\ln\left(e^3-1\right)-2\ln\left(e^2-1\right)-\ln e^3+\ln e^2=$$

$$=\ln\frac{\left(e^3-1\right)^2 e^2}{\left(e^2-1\right)^2 e^3}=\ln\frac{e^6-2e^3+1}{e^5-2e^3+e}.$$

Deci, $\int_2^3 f(x)dx=\ln\frac{64}{27}+\ln\frac{e^6-2e^3+1}{e^5-2e^3+e}$.

Din egalitatea $\ln\frac{64}{27}+\ln\frac{e^6-2e^3+1}{e^5-2e^3+e}=\ln\frac{a\left(e^6-2e^3+1\right)}{e^5-2e^3+e}$, obținem $a=\frac{64}{27}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Item de tip pereche pentru evaluarea competenței specifice **2.2.**: **Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare.**
Exemplu de activitate de învățare:
- *Verificarea, prin calcul, că un număr real este soluție comună a unor ecuații.*
Sarcină de lucru: Asociați fiecărui ecuații menționate în **coloana A**, soluția menționată în **coloana B**.

Notă: Pentru fiecare asociere corectă se acordă **5p**.

Coloana A	*Coloana B*
1. $2x+3=13$	***a)*** $x=2$
2. $3(x-2)+4=2-2(x-3)$	***b)*** $x=6$
3. $\frac{x+2}{3}-1=\frac{2x+6}{2}$	***c)*** $x=5$
4. $(x+2)^2+\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)=2(x-3)^2$	***d)*** $x=-5$
	e) $x=1$

Răspuns așteptat și baremul de evaluare:

1. $\rightarrow$ ***c)***	**5p**
2. $\rightarrow$ ***a)***	**5p**
3. $\rightarrow$ ***d)***	**5p**
4. $\rightarrow$ ***e)***	**5p**

2. Item de tip întrebare structurată pentru evaluarea competenței specifice **6.2.: Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare**

Exemplu de activități de învățare:
- *Utilizarea estimărilor pentru încadrarea într-un ordin de mărime a soluției unei ecuații;*
- *Rezolvarea unor probleme având conținut practic, utilizând ecuații sau sisteme de ecuații liniare.*

Sarcină de lucru: Scrieți rezolvările complete.

În curtea lui Gelu sunt 36 de rațe și porci. În total rațele și porci au 86 de picioare.
(10p) ***a)*** *Este posibil ca numărul rațelor să fie par? Justifică răspunsul dat.*
(30p) ***b)*** *Află numărul de rațe și numărul de porci din curtea lui Gelu.*

Răspuns așteptat și baremul de evaluare:
a) Dacă numărul rațelor ar fi par, atunci numărul de picioare de rațe este multiplu de **4**. **(4p)**
Cum și numărul picioarelor porci este multiplu de **4**, rezultă că numărul picioarelor este multiplu de **4**. **(4p)**
Dar 86 **nu** este multiplu de **4**, deci numărul rațelor nu poate fi par. **(2p)**
b) Notăm x numărul de rațe și y numărul de porci, atunci $x+y=36$. **(5p)**
Deoarece rațele au câte două picioare și porcii câte patru picioare, rezultă $2x+4y=86$. **(5p)**

$$\begin{cases} x+y=36 \,|\cdot(-2) \\ 2x+4y=86 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=-72 \\ 2x+4y=86 \end{cases} \Rightarrow 2y=14 \Rightarrow y=7$$ **(10p)**

Deci, numărul de porci este 7. **(2p)**
$x+y=36 \Rightarrow x+7=36 \Rightarrow x=36-7 \Rightarrow x=29$ **(6p)**
Deci, numărul de rațe este 29. **(2p)**

3. Item de rezolvare de problemă pentru evaluarea competențelor specifice **2.2.** și **4.2. :**
Redactarea rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare
Exemplu de activitate de învățare:
- *Utilizarea metodelor de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare (metoda reducerii și metoda substituției).*
Sarcină de lucru: Scrieți rezolvarea completă.

(30p) *Rezolvați sistemul de ecuații:* $\begin{cases} \dfrac{5x-1}{3}+y=0 \\ 2(x+2y+3)-5(x-y-6)=3 \end{cases}$.

Răspuns așteptat și baremul de evaluare:

$$\begin{cases} \dfrac{5x-1}{3}+y=0 \\ 2(x+2y+3)-5(x-y-6)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-1+3y=0 \\ 2x+4y+6-5x+5y+30=3 \end{cases}$$ **(5p)**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y=1 \quad |\cdot(-3) \\ -3x+9y=-33 \end{cases}$$ **(5p)**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -15x-9y=-3 \quad |\cdot(-3) \\ -3x+9y=-33 \end{cases} \Rightarrow \quad x=2$$ **(10p)**

$$-18x \;/\; =-36$$

$$\begin{cases} x=2 \\ 5x+3y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ 10+3y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ 3y=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$$ **(8p)**

Deci, soluția sistemului este perechea $(2,-3)$. **(2p)**

Total punctaj:
1. 20p
2. 40p
3. 30p
Oficiu 10p